Esercizi di Matematica Discreta

Esercizio 1 (Principio di Induzione)**.** Dimostrare per induzione su $n \in \mathbb{N}$ le seguenti relazioni.

1. $2^n \geq n^2, \ \forall n \geq 4;$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \ , \ \forall n \geq 1;$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1} \ , \ \forall n \geq 1;$
4. $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} k\, 2^{k-1} = (n-1)2^n \ , \ \forall n \geq 2.$

Esercizio 2 (Spazi vettoriali)**.** Dire se i seguenti insiemi sono sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$.

1. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0\};$ [**Soluzione**. *Sì.*]
2. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 0, \ 2x - y + 3z = 0\};$ [**Soluzione**. *Sì.*]
3. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + 2y - 3z = 1\};$ [**Soluzione**. *No.*]
4. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y = 1\};$ [**Soluzione**. *No.*]
5. $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\};$ [**Soluzione**. *No.*]

Esercizio 3 (Spazi vettoriali)**.** Dimostrare che

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0, \ 2x - z = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ e determinarne la dimensione.
[**Soluzione**. $\dim F = 1$.]

Esercizio 4 (Lineare indipendenza)**.** Siano $\boldsymbol{u} = (1,0,0)$, $\boldsymbol{v} = (0,1,0)$ e $\boldsymbol{w} = (2,1,0)$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$, mostrare che sono a due a due linearmente indipendenti, ma che non lo sono globalmente.
Scrivere il vettore $\boldsymbol{\omega} = (4,3,0)$ come combinazione lineare di $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$.

Esercizio 5 (Lineare indipendenza)**.** Siano $\boldsymbol{u} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{v} = (2,3,3)$ e $\boldsymbol{w} = (3,7,1)$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$, mostrare che sono linearmente indipendenti.

Esercizio 6 (Lineare indipendenza)**.** Siano $\boldsymbol{u} = (1,1,0)$, $\boldsymbol{v} = (1,0,2)$ e $\boldsymbol{w} = (0,2,2)$ tre vettori di $\mathbb{R}^3$ ed indichiamo con $(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$;

1. scrivere le coordinate di $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ rispetto alla base canonica;
2. dimostrare che $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ è una base di $\mathbb{R}^3$ e scrivere le coordinate di $\boldsymbol{e}_2$ rispetto a tale base.

Esercizio 7 (Ordine di infinito)**.** Determinare l'ordine di infinito $\mathcal{O}$ (o-grande) delle seguenti espressioni.

1. $n^4 + \dfrac{1}{n}$;
2. $\dfrac{\sqrt{n}+1}{n+2}$;
3. $\dfrac{n^3 + 5n - \cos n\pi}{1 - \sqrt{n}}$;
4. $\dfrac{n^2+2}{\sqrt[3]{n}}$.